

Introduction

Les caractéristiques physiques de Nawee proviennent essentiellement de la lettre NR-21 ; à partir de ces données, nous avons pu déduire quelques paramètres physiques supplémentaires dans l'article « Nawee ». Le tableau suivant résume cela.

| Paramètres physiques | NR 21 | Calculs |
|------------------------------------|-------------|------------------|
| NAWEE | | |
| Rayon(m) | 6,22E+07 | |
| Masse (kg) | 9,91E+25 | |
| Distance Ioumma (m) | 5,97E+10 | |
| Excentricité de l'orbite | 0,026 | |
| Inclinaison / Ummo (°) | 1,53 | |
| Densité (kg/m ³) | | 98 |
| Type de planète | | Gazeuse "puffy" |
| Période (jours) | | 107 |
| Température équilibre (°K) | | 300 |
| Flux stellaire (W/m ²) | | 1850 |
| Diamètre apparent | depuis Ummo | en minutes d'arc |
| Conjonction Supérieure | | 2,7 |
| Conjonction Inférieure | | 10,6 |

A partir de ce tableau, et des découvertes récentes dans le domaine des exoplanètes, peut-on aller encore plus loin et répondre à la question : Nawee est-elle une exoplanète plausible, ou une simple extrapolation d'un habile faussaire ?

Informations Ummites complémentaires issues de la NR-21 et hypothèses pour ce travail

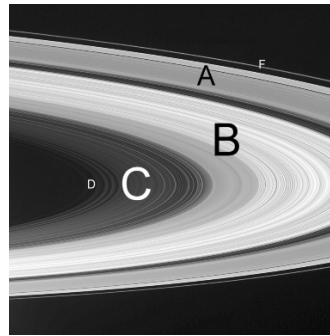
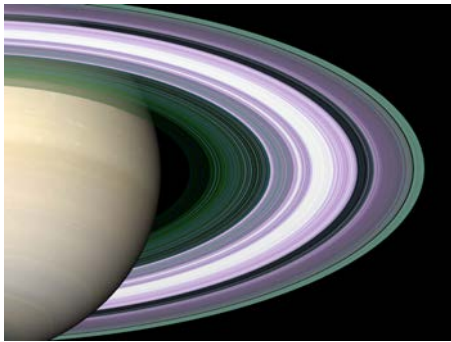
« NAWEE est un astre que vous qualifiez de « géante gazeuse » dont la taille est environ moitié moindre que celle de votre planète Saturne ».

« Son atmosphère, extrêmement chaude, est animée de forts courants convectifs et agitée en permanence de violents orages qui provoquent d'incessantes scintillations et lui confèrent une luminosité propre, complémentaire à la lumière reflétée d'IOUMMA ».

A partir de ces deux phrases, nous allons retenir pour cette étude les quelques hypothèses suivantes.

Hypothèses

- 1- Nawee est une géante gazeuse type Saturne, bien que nettement moins massive. On partira donc de l'hypothèse qu'elle est constituée principalement d'un mélange d'hydrogène et d'hélium, dans une proportion voisine de l'étoile Iouma ($X=0.71$, $Y=0.27$, $Z=0.02$).
- 2- Le rayon de Saturne est de 58232 km. Mais si on examine Saturne et ses anneaux, on sait que l'anneau A par exemple s'étend de 122170 km à 136775 km. Cela correspond grosso modo à 2 fois le rayon de Nawee (124400 km).



Nous conserverons donc la valeur du rayon de Nawee donnée dans la NR-21.

- 3- On connaît très peu de choses de l'atmosphère de Nawee : la seule donnée factuelle est celle calculée de la température d'équilibre en haut de l'atmosphère d'environ 300 °K. Mais cette atmosphère posséderait une zone de convection, extrêmement chaude, qu'il faudrait retrouver dans cette étude.
- 4- On devra aussi examiner la question de la luminosité propre de Nawee, pour déterminer si celle-ci est due au refroidissement de la planète, ou plus prosaïquement si elle provient des orages atmosphériques, ou alors de la température équivalente de la planète.

Dans la suite, nous utiliserons les données présentées en introduction, ainsi que les hypothèses ci-dessus, afin de les confronter aux publications scientifiques récentes sur les exoplanètes.

Dans ce but, nous dressons le petit tableau suivant, permettant d'exprimer la masse et le rayon de Nawee en fonction de ceux de la Terre ou de Jupiter, car les publications utilisent souvent ces référentiels pour produire des diagrammes.

| NAWEE | Terre | Jupiter |
|-------|-------|---------|
| Rayon | 9,8 | 0,89 |
| Masse | 16,6 | 0,052 |

Une constitution possible de Nawee

La figure suivante présente un diagramme {Masse, Rayon} de quelques exoplanètes dans la gamme 20 MT à 60 MT, sur lequel j'ai rajouté une croix pour Nawee en noir, le noir correspondant à sa température d'équilibre.

THE ASTRONOMICAL JOURNAL, 161:70 (13pp), 2021 February

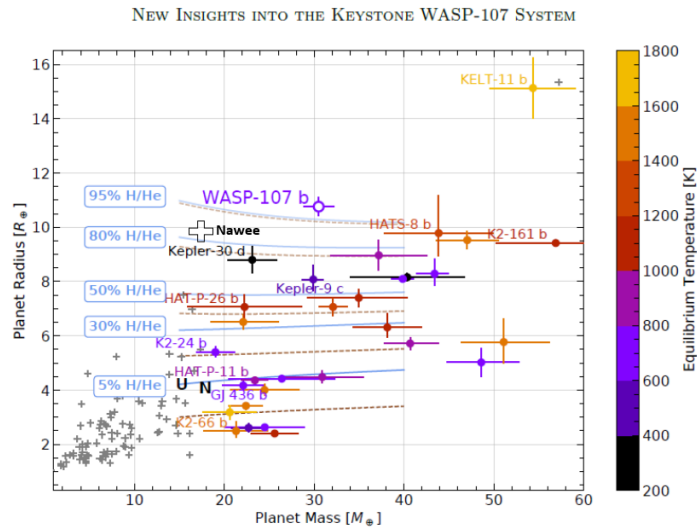


Figure 3. Mass-radius diagram of the detected exoplanets with a mass and radius measured with 30% or higher precision, zoomed-in on super-Neptunes having masses between 20 and 60 M_{\oplus} (colored by equilibrium temperature). The positions of Uranus and Neptune are indicated by black letters. The solid blue and dashed saddlebrown curves correspond to various envelope mass fractions from the grid of solar-metallicity envelopes atop pure H_2O or Earth-like cores respectively, interpolated to match an age of 3.4 Gyr and the incident flux corresponding to WASP-107b. If no inflation mechanism is considered, we obtain a 3σ lower limit on the envelope mass fraction of 85%, which corresponds to a core mass of only 4.6 M_{\oplus} . The larger KELT-11b may be inflated due to its high equilibrium temperature (Pepper et al. 2017).

D'après ce diagramme, Nawee serait constituée à plus de 85 % d'un mélange hydrogène-hélium noté H-He dans la suite, car elle se situe entre les isoconcentrations 80 % et 95% (lignes bleues).

Un second point intéressant est la présence sur ce diagramme d'une exoplanète notée Kepler 30d non loin de Nawee. L'article suivant de 2013 étudie de près Kepler 30 d.

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL LETTERS, 769:L9 (5pp), 2013 May 20

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL LETTERS, 769:L9 (5pp), 2013 May 20

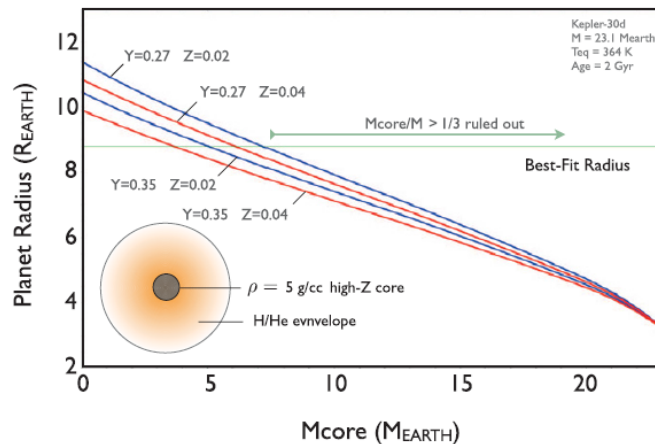


Figure 2. The radius–core mass relationship for Kepler-30d, assuming various envelope compositions. The blue curves correspond to envelopes with $Z = 0.02$ while the red curves correspond to $Z = 0.04$. The schematic in the bottom left corner of the figure represents the considered two-layer interior models (here drawn to scale with a 5 M_{\oplus} core).

Les auteurs estiment que Kepler 30d serait constituée d'un noyau rocheux de quelques masses terrestres, entouré d'une enveloppe constituée d'un mélange H-He. Nous retiendrons ce modèle dans la suite pour Nawee.

La masse du noyau rocheux de ce type de planète dépend de la température d'équilibre. Les figures suivantes montrent que pour Nawee, le cœur rocheux se situerait entre 1 MT et 3 MT (croix noires pour Nawee).

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL LETTERS, 769:L9 (5pp), 2013 May 20

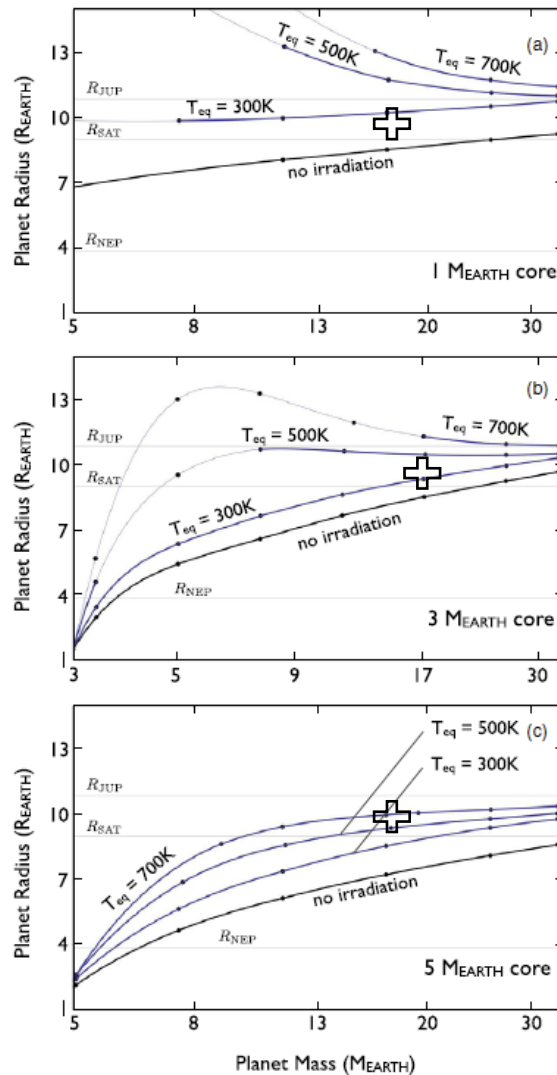


Figure 3. Mass-radius relationships of low-mass, gas-dominated planetary models. Panels (a), (b), and (c) correspond to planets with core-masses of $M_{\text{core}} = 1, 3,$ and $5 M_{\oplus}$ respectively. On each panel, mass-radius relationships corresponding to equilibrium irradiation temperatures of $T_{\text{eq}} = 300, 500,$ and 700 K are shown as blue lines. Additionally, isolated mass-radius relationships are shown as black lines. Solid lines run through models that are stable against evaporation while the converse is true for thin lines. Note that radii characteristic of giant planets are readily attainable for mildly irradiated $M \sim 10 M_{\oplus}, M_{\text{core}} = 1, 3 M_{\oplus}$ planets.

Compte tenu de ces informations, nous allons bâtir un modèle générique simple de planète pour en déterminer une structure possible pour Nawee.

Un modèle de structure interne pour Naweé

J'ai placé les détails mathématiques du modèle en Annexe 1 pour ne pas alourdir ce chapitre : à partir de ce modèle générique planétaire et quelques ajustements, on construit une solution possible pour la densité de Naweé en fonction de son rayon, de laquelle on déduit la pression en dehors du cœur, pour la partie H-He.

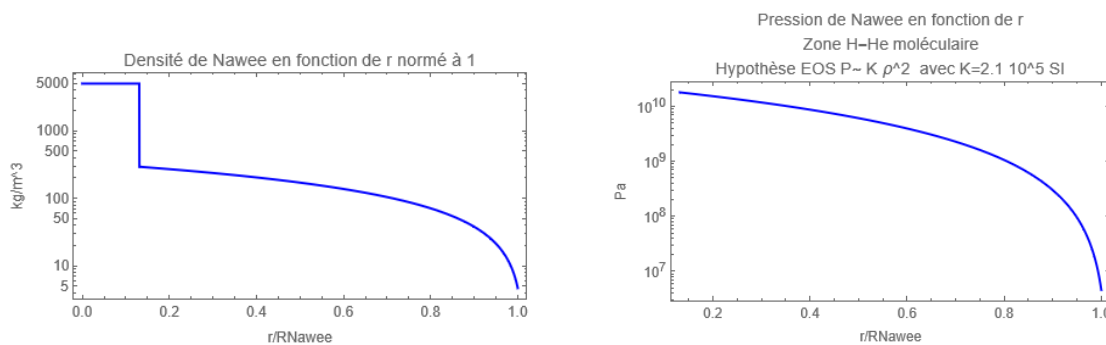
Le cœur est ajusté à 1.9 MT et s'étend jusqu'à 0.131 rayon de Naweé, avec une densité moyenne de 5000 kg/m³ comme dans l'article précédent concernant Kepler 30d.

Si on se reporte sur la figure de cet article {Planet Radius, M_{core}}, on trouverait une composition H-He telle que {X=0.63, Y=0.35, Z=0.02}. Cette déplétion en hydrogène peut s'expliquer selon les auteurs par un soufflage préférentiel de l'hydrogène lors de la phase de formation dynamique de la planète. Ce scénario est plausible pour Naweé qui se situe proche de son étoile.

Nous avons obtenu par ajustement la densité en fonction de r, ceci afin de restituer la masse totale de Naweé après intégration de la densité.

Quant à la pression, le modèle générique prend comme hypothèse une équation d'état de la forme $P[r]=K \rho[r]^2$, avec $K=2.1 \cdot 10^5$ SI, ce qui a permis de trouver une solution analytique pour la densité.

Voici les deux courbes obtenues en Annexe 1, encore une fois avec un modèle générique très simple.



Ces courbes sont intéressantes, car elles montrent que nous n'atteignons jamais les conditions de densité et de pression susceptibles d'engendrer une transition de phase de l'hydrogène vers de l'hydrogène métallique, comme c'est le cas par exemple pour Saturne (figure ci-dessous à droite). Pour Saturne, voici ce que pensent les scientifiques de sa structure interne, avec ci-après à gauche la densité résultante en fonction du rayon réduit.

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, 871:1 (15pp), 2019 January 20

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, 871:1 (15pp), 2019 January 20

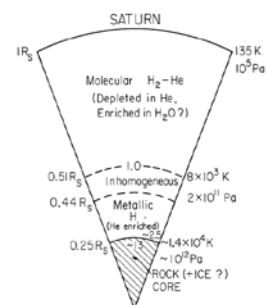
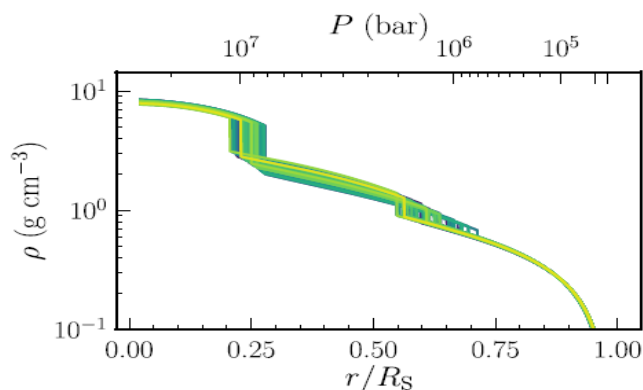


Figure 6. Schematic representation of the present day Saturn, showing a partially differentiated structure because of downward helium migration. Numbers adjacent to boundaries are densities in g.cm⁻³.

L'allure de la densité pour Saturne en dessous de 1000 kg/m^3 correspond à la forme attendue. On voit apparaître la transition de phase pour Saturne vers 1000 kg/m^3 et $2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ ($2 \cdot 10^6 \text{ bar}$ sur la figure), valeurs jamais atteintes pour Nawee.

- ⇒ La structure interne de Nawee serait donc bien plus simple que celle de Saturne, et de type proche de Kepler 30d, avec un noyau rocheux de 1.9 MT et une enveloppe H-He qui représenterait les 88 % restant de la masse de Nawee.

La température interne de Nawee

Voici maintenant un diagramme de phase de l'hydrogène publié par Stevenson en 1982 (Interior of the giant planets)

Ann. Rev. Earth Planet. Sci. 1982. 10:257-95

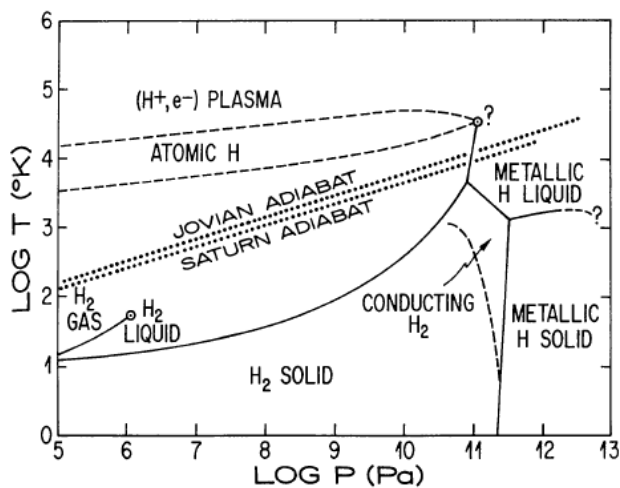


Figure 1 Phase diagram of hydrogen. Solid lines indicate first order phase transitions (except that the line ending in a question mark and separating fluid H_2 from fluid metallic H is uncertain). The conducting H_2 region is hypothetical. The dotted adiabats for Jupiter and Saturn are lines of constant entropy fixed by the atmospheric temperature at 10^5 Pa (1 bar) given in Table 1.

Dans la continuité du chapitre précédent, on observe que pour des intérieurs de planètes comme Jupiter ou Saturne, l'atteinte de très hautes pressions $>10^{11} \text{ Pa}$ induit un passage de l'hydrogène en phase métallique.

Comme nous l'avons vu précédemment, de telles pressions ne sont pas atteintes pour Nawee.

La courbe de la température interne pour Nawee aux hautes pressions doit suivre une adiabatique parallèle à celles de Saturne et Jupiter, mais il nous manque une information, à savoir comment raccorder cette adiabatique aux températures atteintes dans l'atmosphère de Nawee ? Car pour Jupiter et Saturne, ces adiabatiques descendent jusqu'à 1 bar, et on connaît les températures atteintes pour cette valeur de pression (respectivement 135°K pour Saturne et 170°K pour Jupiter).

Pour avoir une réponse à cela, il faut se pencher sur une publication de 2007.

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, 659:1661–1672, 2007 April 20
© 2007. The American Astronomical Society. All rights reserved. Printed in U.S.A.

PLANETARY RADII ACROSS FIVE ORDERS OF MAGNITUDE IN MASS
AND STELLAR INSOLATION: APPLICATION TO TRANSITS

J. J. FORTNEY,^{1,2,3} M. S. MARLEY,¹ AND J. W. BARNES⁴

La figure suivante est très intéressante, car elle détaille la structure de l'atmosphère d'une exoplanète, en partant de sa température d'équilibre en haut de l'atmosphère ; en descendant en altitude (ou en augmentant la pression), on trouve une zone radiative quasi isotherme, suivie d'une zone convective plus ou moins étendue (traits épais obliques).

Pour des planètes comme Jupiter ou Saturne, possédant une température d'équilibre faible, cette zone se poursuit ensuite sans discontinuité vers les très hautes pressions en se raccordant à l'adiabatique évoquée plus haut.

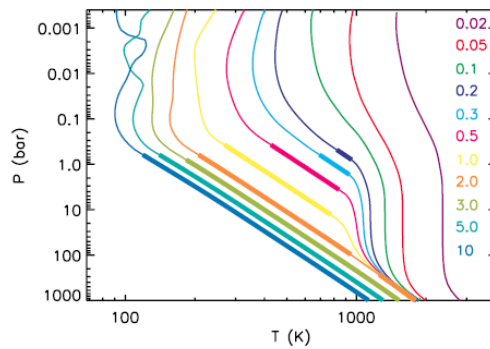
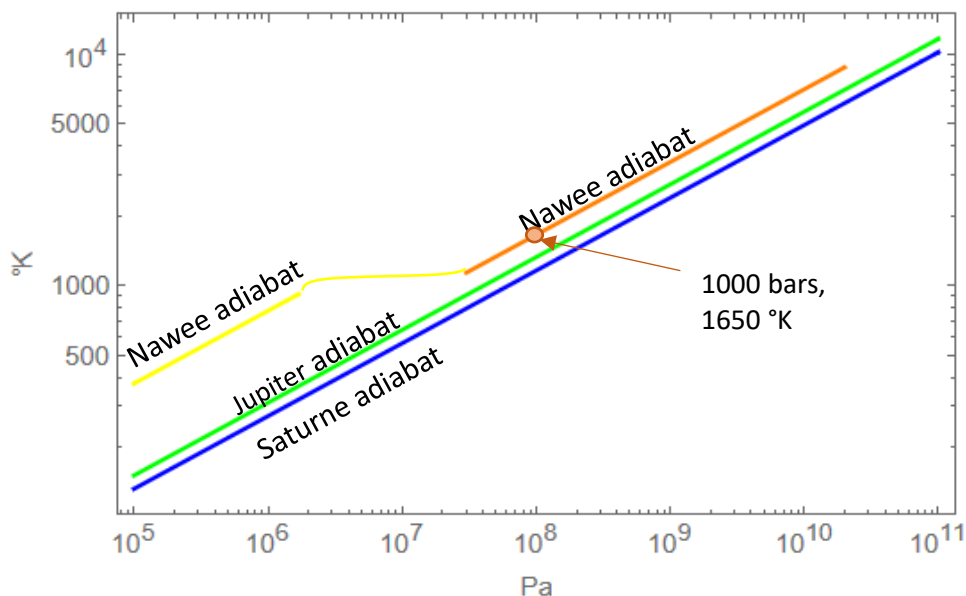


FIG. 3.—Pressure-temperature profiles for ~ 4.5 Gyr Jupiter-like planets ($g = 25 \text{ m s}^{-2}$, $T_{\text{int}} = 100 \text{ K}$) from 0.02 to 10 AU from the Sun. Distance from the Sun in AU is color coded along the right side of the plot. Thick lines are convective regions, while thin lines are radiative regions. The profiles at 5 and 10 AU show deviations that arise from numerical noise in the chemical equilibrium table near condensation points, but this has a negligible effect on planetary evolution.

Mais pour des planètes comme Nawee, possédant une température d'équilibre plus élevée (300 °K), la zone adiabatique convective est suivie d'une nouvelle zone radiative avant de retrouver un régime adiabatique pour les plus hautes pressions (après 1000 bars).

La figure ci-dessus a été élaborée pour des distances au Soleil et un éclairement Solaire. Ioumma étant moins lumineuse que le Soleil, il faut éloigner fictivement la planète étudiée pour retrouver la température d'équilibre cherchée (ici $T_{\text{eq}} \sim 300 \text{ °K}$). Autrement dit, Nawee se situerait vers 0.85 UA dans le graphe ci-dessus, c'est-à-dire tout près et au-dessus de la courbe en jaune. Cette courbe rejoint l'adiabatique en orange, qui passe par le point {1000 bars, 1650 °K}, que nous allons prendre comme point de recalage de l'adiabatique dans le domaine des très hautes pressions.

Le code couleur du graphique résultant ci-dessous est le même que pour la figure ci-dessus.



Ce dernier graphique permet alors d'avoir des ordres de grandeur des températures. Il permet de montrer l'existence d'une zone de convection importante (en jaune trait épais), avec des températures atmosphériques comprises entre 300 °K et 800 °K.

- ⇒ Cette zone de convection extrêmement chaude correspondrait à l'atmosphère de Nawee telle que décrite dans la NR-21. Ces mouvements convectifs doivent être accompagnés de vents très violents.

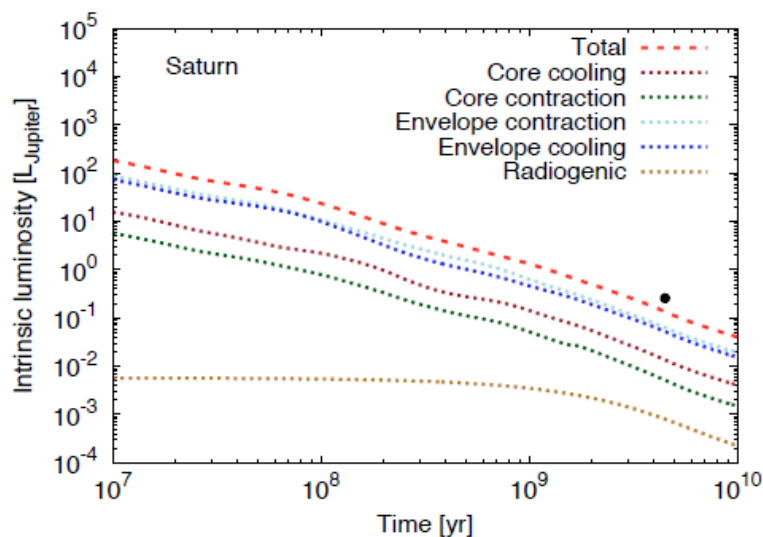
La luminosité de Nawee

Nawee est une planète très ancienne, si on suppose un âge suivant en cela celui de son étoile Ioumma (6.3 Milliards d'années).

Elle s'est donc probablement déjà beaucoup refroidie, et son émission lumineuse thermique intrinsèque doit pouvoir être comparée à celle de Saturne, ce qui nous intéresse car Nawee aurait une composition assez voisine de celle de Saturne.

Si on examine un modèle de luminosité intrinsèque de Saturne, on trouve dans la littérature le graphe suivant, issu d'une référence de 2019.

A&A 623, A85 (2019)



Ce graphe montre que la luminosité intrinsèque de Saturne à travers les âges provient essentiellement du refroidissement et de la contraction de son enveloppe constituée du mélange H-He. Les autres contributeurs, comme le refroidissement du cœur, ou la radioactivité, sont négligeables. Un tel modèle convient donc très bien pour Nawee.

Mais il faut effectuer une correction : en effet, cette luminosité est proportionnelle à la variation de l'énergie potentielle gravitationnelle avec le temps. Et cette énergie potentielle est elle-même proportionnelle au carré de la masse de la planète. Une démonstration figure en Annexe 2.

Si on corrige donc d'un facteur utilisant les masses des deux planètes, on obtient pour Nawee un facteur correctif pour sa luminosité intrinsèque :

$(5.683 \cdot 10^{26} / 9.91 \cdot 10^{25})^2 = (5.73)^2$ soit une luminosité 33 fois plus faible que celle de Saturne.

A l'aide du graphe ci-dessus et pour **6.3 GYears**, on obtient alors LI, luminosité intrinsèque de Nawee :

$10^{-1} L_{\text{Jupiter}} / 33 = 0.003 \cdot 3.34 \cdot 10^{17}$ soit environ **LI=10¹⁵ W.**

Une autre source plus ancienne de 2005 donne le même ordre de grandeur.

Le graphe suivant provient de « Annual Review of Earth and Planetary Sciences, vol.33, p.493-530 2005 ». Il confirme cet ordre de grandeur : si on place le point de Nawee sur ce graphe (symbole de Neptune car la masse de Nawee est à peu près celle de Neptune) on se rend compte que sa luminosité thermique intrinsèque serait environ 100 fois plus faible que celle de Jupiter, soit $L_I = 3.3 \cdot 10^{15}$ Watts, ce qui est cohérent du résultat précédent, d'autant plus que cette valeur correspond ici à **4.5 Gyears d'évolution** et non 6.3 Gyears.

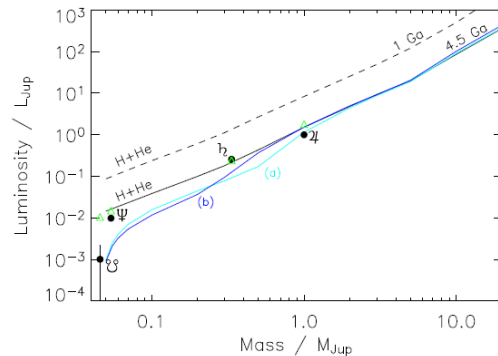


Figure 2: Luminosity versus mass for giant planets after 4.5 Ga of evolution compared to measured values for our four giant planets (including the significant uncertainty on Uranus' luminosity). The lines correspond to: H+He: a pure hydrogen-helium composition with a helium mass mixing ratio $Y = 0.25$; (a): a model with $Y = 0.30$ and a $15 M_E$ core; (b): the same model but with $Y = 0.36$.

Cette estimation de luminosité intrinsèque L_I peut paraître imprécise, mais elle est de toute manière négligeable par rapport à la luminosité thermique propre de Nawee, cette dernière étant due au chauffage de son atmosphère par son étoile Ioumma.

Si on considère en effet une température équivalente de Nawee de l'ordre de 300 °K, on obtient via la loi de Stefan :

$L_{Teq} = 2.2 \cdot 10^{19}$ Watts ce qui est sans commune mesure avec la luminosité intrinsèque estimée ci-dessus.

⇒ Nawee doit donc beaucoup rayonner dans l'infrarouge aux alentours de 10 μ m de longueur d'onde.

Nawee réfléchit également la lumière de Ioumma dans le spectre de Ioumma. On obtient :

$L_R = 7.7 \cdot 10^{18}$ Watts si on suppose un albédo de 0.34 comme celui de Saturne.

⇒ Nawee émet également une quantité importante d'énergie dans le spectre de Ioumma.

Au final, Nawee émet donc à la fois de la lumière réfléchie provenant de Ioumma dans le spectre de Ioumma (étoile de type K), celle-ci étant fortement complétée par la lumière infrarouge issue du chauffage de Nawee par Ioumma : la lumière non réfléchie par Nawee est absorbée par l'atmosphère de Nawee et réémise sous forme infrarouge.

⇒ Ce résultat est cohérent de ce que nous recherchions.

Les images suivantes montrent à titre illustratif comment nous observons Jupiter, Uranus et Neptune dans l'infrarouge (fausses couleurs).

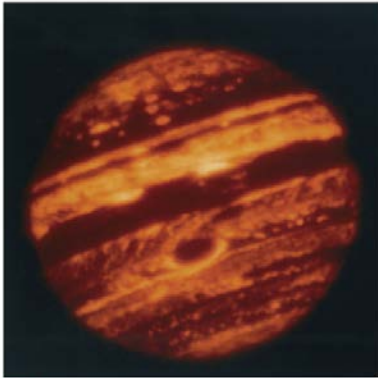


FIGURE 32.9 At a wavelength of $5\ \mu\text{m}$, most of the light from Jupiter is thermal radiation emitted near the 6-bar pressure level below the visible cloud. Places where the clouds are thin permit the deep radiation to escape to space, making these regions appear bright. Thicker clouds block the radiation and these appear dark. Jupiter's Great Red Spot is the dark oval just below the center. This image was taken with the NASA Infrared Telescope Facility. *Courtesy of J. Spencer.*

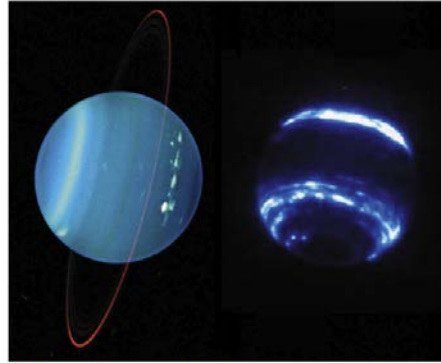


FIGURE 32.10 Images of Uranus (left) and Neptune (right) taken in 2004 and 2000, respectively. Both were obtained at the Keck telescope with filters in the near infrared. Many cloud features that were not seen during the *Voyager* flyby can be seen. The Uranus ring can also be seen (a red ellipse in this false-color representation). *The Uranus image appeared on the cover of Icarus (December 15, 2005, issue) and was provided by L. Sromovsky. The Neptune image is from de Pater, I., et al. (2005). Copyright Academic Press.*

Egalement à titre illustratif, l'image suivante montre que Saturne est le siège d'aurores polaires.



CONCLUSION

A partir de données très parcellaires, il est toujours possible de construire un modèle planétaire générique très simple qui s'accorde avec ces données.

Par analogie avec diverses études récentes d'exoplanètes réelles (2013,2019,2021), on déduirait que Nawee serait constituée d'un noyau rocheux de 1.9 Masse Terrestre entouré d'une enveloppe H-He qui représenterait les 88 % restant de la masse de Nawee.

Ces résultats sont basés essentiellement sur un modèle planétaire générique très simple, et une équation d'état spécifique reliant la densité et la pression du mélange gazeux. Concernant la température interne de Nawee, une hypothèse adiabatique a été formulée, suivant en cela la physique interne de Jupiter et de Saturne.

Les conditions de température et de pression internes n'impliqueraient aucunement un passage de l'hydrogène en phase métallique, comme c'est le cas par exemple pour Saturne.

Ensuite, une extrapolation issue d'une publication de 2007 nous orienterait vers une planète dont l'atmosphère serait très chaude avec une zone de convection dont les températures iraient de 300 à 800 °K.

La luminosité de Nawee ne proviendrait pas de son refroidissement progressif, car celle-ci serait largement supplantée par la lumière de Ioumma réfléchi dans le visible, à laquelle il faut ajouter la lumière infrarouge issue du chauffage de l'atmosphère de Nawee par Ioumma.

Les barres d'incertitude sur tous ces résultats sont certainement très larges, mais cela ne change pas les grands traits physiques de cette description.

A ce stade, il nous paraît difficile d'aller plus loin : Nawee, planète géante avec une grande zone de convection à haute température doit générer des vents très violents dans son atmosphère, avec des orages et les phénomènes lumineux inévitables qui les accompagnent. De même, Nawee posséderait sans doute un champ magnétique issu de son cœur rocheux. Et en complément, il faut rappeler que Nawee est beaucoup plus proche de son étoile que Jupiter du Soleil : Ioumma est une étoile très active dans le domaine X, ce qui devrait induire dans l'atmosphère de Nawee une ionosphère non négligeable. Le couplage de cette ionosphère avec un champ magnétique même faible pourrait engendrer des aurores polaires comme sur Saturne.

La planète générique construite dans cet article est physiquement plausible et rien ne permet de contredire de manière évidente le texte de la NR 21, qui reste de toute manière très général concernant la structure et l'atmosphère de Nawee.

Un faussaire habile peut-il avoir produit en 2009 les données de base de la NR-21 et utilisées dans cet article ?

En théorie, oui. Avec tout de même de bonnes connaissances en astronomie et planétologie.

Mais en pratique, la réponse est beaucoup plus délicate : car si on consulte les catalogues d'exoplanètes, on se rend compte qu'en 2009, nous n'avions pas encore découvert d'exoplanètes avec une densité moyenne aussi faible que celle déduite pour Nawee (98 kg/m^3). Et ce n'est qu'à partir de 2012 que nous commençons à faire ce type de découvertes (Kepler 30 d citée dans cet article).

Un faussaire réellement habile n'aurait-il pas inventé une exoplanète avec un rayon un peu plus faible, comme celui de Neptune ou d'Uranus, conduisant à des densités plus proches de celle de Saturne (687 kg/m^3) ? Une telle densité aurait été nettement plus facile à accepter à cette époque.

Annexe 1 Generic Planetary Models

On trouvera ce modèle générique dans le cours de David Stevenson du Caltech (USA) fait au printemps 2021. <http://web.gps.caltech.edu/classes/ge131/lectures.html>

Le modèle est développé au chapitre 9 de ce cours.

Il fait l'hypothèse d'une équation d'état très plausible pour le mélange H-He du type $P[r]=K \rho[r]^2$, P étant la pression en fonction du rayon r , et $\rho[r]$ étant la densité en fonction du rayon.

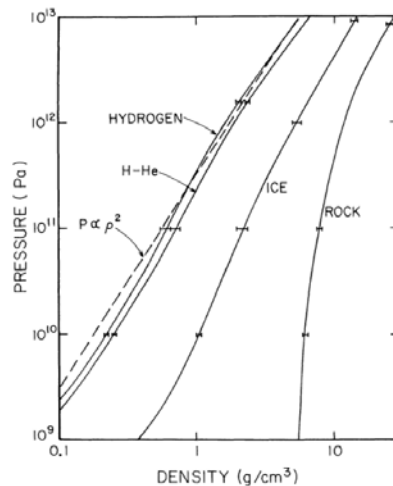


Figure 2 Typical isentropes relevant to the giant planets. The hydrogen and hydrogen-helium (25% helium by mass) isentropes pass through $T = 170$ K at $P = 10^9$ Pa (appropriate to Jupiter). The molecular-metallic hydrogen transition has been smoothed but may be discontinuous. The dashed line is the best fitting curve of the form $P = K\rho^2$ for pure hydrogen, indicating the usefulness of this simple analytic approximation. The isentropes of "ice" and "rock" correspond to the mixtures used by Hubbard & MacFarlane (1980) and are chosen to be appropriate for Uranus (i.e. $T = 2000$ K at $P = 2 \times 10^{10}$ Pa for ice, $T = 7000$ K at $P = 6 \times 10^{11}$ Pa for rock). Error bars indicate the uncertainties.

Il obtient alors à partir de quelques équations de base une solution pour la densité du type :

$$\rho(r) = A \frac{\sin kr}{kr} + B \frac{\cos kr}{kr}$$

Ceci est tout à fait remarquable, car une telle solution peut s'appliquer à tout un ensemble de configurations physiques planétaires en ajustant les paramètres A et B.

Si par exemple il n'y a pas de cœur rocheux, $B=0$ et la planète générique a un rayon de 70300 km.

S'il y a un cœur rocheux, la fraction de masse du « lourd » est donnée par un certain coefficient y .

Si y n'est pas trop grand, alors le rayon générique de la planète de Stevenson doit être réduit d'un facteur $(1-y)$.

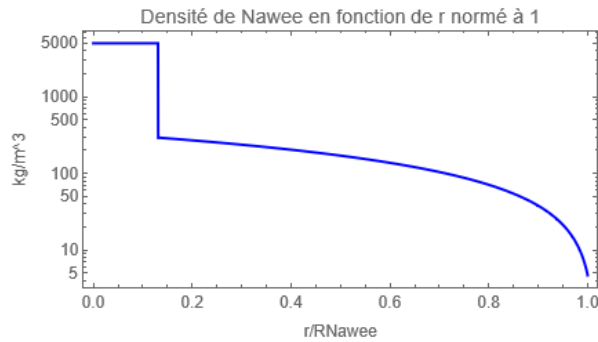
Réciproquement, si on connaît le rayon de la planète (Nawee 62200 km), on peut en déduire y : $(1-y) 70300 = 62200 \Rightarrow y = 0.115$, et la quantité d'éléments lourds dans Nawee serait de $9.91 \cdot 10^{25} \cdot y = 1.14 \cdot 10^{25}$ soit 1.9 MT.

Cette estimation donne pour le cœur de Nawee une masse de 1.9 MT, cohérente de la publication du texte concernant Kepler 30d (nous avons borné le cœur de Nawee entre 1 et 3 MT):

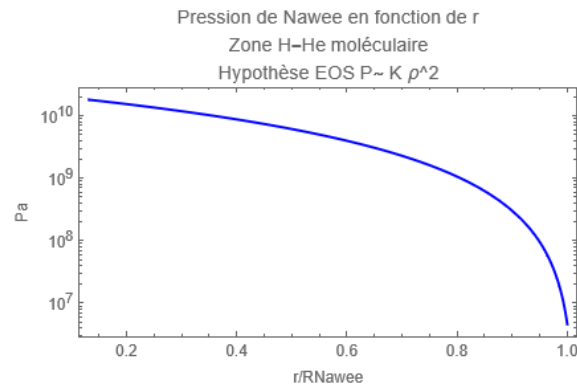
THE ASTROPHYSICAL JOURNAL LETTERS, 769:L9 (5pp), 2013 May 20

Si la densité du cœur est en moyenne de 5000 kg/m^3 , celui-ci s'étendrait alors jusqu'à 8170 km soit 13.1% du rayon de Nawee.

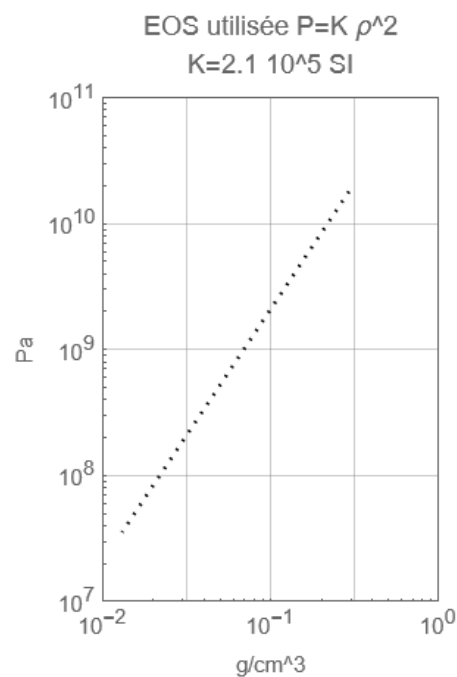
Connaissant la masse totale de Nawee, on peut ajuster les coefficients de la fonction ci dessus pour obtenir la densité en fonction du rayon.



On en déduit la pression en fonction du rayon dans la zone H-He à partir de l'équation d'état.



Et on vérifie que l'équation d'état proposée au début par Stevenson est bien suivie :



Annexe 2 La luminosité de Nawee

L'explication suivante provient de l'article de Th Guillot de 2005 dont la référence est « Annual Review of Earth and Planetary Sciences, vol.33, p.493-530 ».

La luminosité intrinsèque est proportionnelle à la variation temporelle de l'énergie gravitationnelle.

$$L = -\frac{\xi - 1}{\xi} \frac{dE_g}{dt}, \quad (6)$$

where $\xi = \int_0^M 3(P/\rho)dm / \int_0^M u dm \approx \langle 3P/\rho u \rangle$ and u is the specific internal energy. For a diatomic perfect gas, $\xi = 3.2$; for fully-degenerate non-relativistic electrons, $\xi = 2$.

Thus, for a giant planet or brown dwarf beginning its life mostly as a perfect H_2 gas, two third of the energy gained by contraction is radiated away, one third being used to increase E_i . The internal energy being proportional to the temperature, the effect is to heat up the planet. This represents the slightly counter-intuitive but well known effect that a star or giant planet initially heats up while radiating a significant luminosity.

Le calcul de cette énergie se fait comme suit, en simplifiant avec une densité variant comme

$$\rho(r) = A \frac{\sin kr}{kr}.$$

L'élément important ici est le coefficient A, ajusté pour chaque planète Nawee ou Saturne, afin de redonner après intégration la masse totale de la planète considérée.

Le champ gravitationnel en r s'écrit :

$$g[r] = \frac{4 A G \pi \text{SinIntegral}[kr]}{kr^2}$$

Et il faut intégrer $g[r]^2$ entre 0 et R pour avoir l'énergie gravitationnelle :

$$Eg = - \frac{2 A^2 G \pi \int \frac{\text{SinIntegral}[kr]^2}{r^4} dr}{k^2}$$

Puisque les paramètres {R,k} des deux planètes Nawee et Saturne sont approximativement les mêmes, à l'exclusion du coefficient A, on obtient la proportionnalité $Eg \sim - A^2$

Et comme la masse de chaque planète est proportionnelle à A par construction, on obtient le résultat attendu, à savoir :

$$Eg \sim - M^2$$

Ceci est cohérent avec l'énergie gravitationnelle d'une sphère homogène qui s'écrit

$$Eg \text{ Sphère} = -3/5 G M^2/R$$

Tout ceci ne dit pas comment Eg varie en fonction du temps : c'est l'objet du texte principal.